Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Први разред – А категорија

1. На правој AB изабрано је 2021 тачака, тако да ниједна од њих не припада дужи AB. Доказати да збир растојања тих тачака од тачке A не може бити једнак збиру растојања тих тачака од тачке B.

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}=\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}\,.$$

3. Одредити све просте бројеве p и q, такве да је $(p^3+1)^q$ квадрат природног броја.

4. Нека су $f(x)$ и $g(x)$ линеарне функције такве да график функције $f(g(x))$ садржи тачку $(2021, 2022)$, график функције $g(f(x))$ садржи тачку $(2022, 2021)$ и важи $f(g(x)) - g(f(x)) = 2$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Одредити $f(2021) - g(2022)$.

5. У $\triangle ABC$ је $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, r полупречник, а S центар уписаног круга. Нека су D и E пресеци симетрала унутрашњих углова код темена A и B, редом, са правом која садржи средишта страница BC и CA тог троугла. Одредити површину троугла SDE.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Други разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\,.$$

2. У троуглу ABC угао код темена A једнак је $90°$, а угао код темена C једнак је $70°$. Нека је P тачка дужи AB таква да је $\sphericalangle ACP = 30°$, а Q тачка дужи AC таква да је $\sphericalangle CPQ = 20°$. Доказати да је права BQ симетрала угла код темена B троугла ABC.

3. Одредити све природне бројеве m и n такве да важи

$$m^{2022} + 2 = n^{m-1}.$$

4. Нека су a и b реални бројеви. Доказати да барем једна од једначина

$$x^2 + 2ax + b = 0, \quad ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2x + a = 0,$$

има решења у скупу реалних бројева.

5. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које постоји затворена изломљена линија која се састоји од n дужи, тако да се сваке две дужи секу и тако да су свака три темена те изломљене линије неколинеарна. (Две дужи се секу ако имају макар једну заједничку тачку; та тачка може бити и крајња тачка дужи.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које је могуће поделити скуп

$$\{2! - 1, 3! - 1, \ldots, n! - 1\}$$

на два подскупа, тако да су збирови елемената у та два подскупа једнаки.

2. Ако су m, n непарни природни бројеви, доказати да решења једначине

$$x^2 + 2mx + 2n = 0$$

нису рационални бројеви.

3. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & \ldots & + & 2021x_{2021} & + & 2022x_{2022} & = & 1, \\
x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & \ldots & + & 2021x_{2022} & + & 2022x_1 & = & 2, \\
 & & & & & & & & & & & \vdots & \\
x_{2022} & + & 2x_1 & + & 3x_2 & + & \ldots & + & 2021x_{2020} & + & 2022x_{2021} & = & 2022.
\end{array}$$

4. Нека је ABC оштроугли троугао, чији је центар уписаног круга S, а ортоцентар H. Нека су D, E, F додирне тачке уписаног круга са BC, CA, AB, редом, а Y средиште лука BC којем припада тачка H описаног круга троугла BCH. Нека се нормала из B на DE и нормала из C на FD секу у тачки X. Доказати да је $XY \perp EF$.

5. Нека је S коначан скуп позитивних реалних бројева чији је збир s. Елемент $r \in S$ назива се *раздвајач* ако се скуп $S \setminus \{r\}$ може поделити на два скупа A и B ($A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S \setminus \{r\}$), тако да је збир свих елемената у било ком од A и B не већи од $\frac{s}{2}$. Доказати да је збир свих раздвајача не мањи од $\frac{s}{2}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $ABCD$ четвороугао са правим углом код темена B и оштрим углом код темена D. Нека је M средиште дужи AB, а E пресечна тачка нормале на AB у тачки A и нормале на AD у тачки M. Ако је F пресечна тачка правих EC и MD и ако је права MC нормална на праву BD, доказати да је $\sphericalangle BFA = \sphericalangle EMC$.

2. Колико има тројки (a, b, c) реалних бројева, таквих да квадратна функција $f(x) = ax^2+bx+c$ задовољава $f(a) = 2abc$ и $f(b) = f(c) = abc$?

3. Број n добијен је множењем броја 2022 и природног броја чији декадни запис садржи само цифре 0 и 2. Одредити које цифре у декадном запису може имати број n.

4. Одредити све природне бројеве n такве да важи

$$\log_{n+1}(n^2 + 3n) + \log_{3n}(n^2 - 6) = \log_{2(n-1)}(n^3 + 9).$$

5. У равни се налази скуп $\mathfrak{T}$, који се састоји од 25 тачака, међу којима су A и B, $A \neq B$, тако да никоје три тачке из $\mathfrak{T}$ нису колинеарне. Нека је $\mathfrak{D}$ скуп дужи који задовољава следеће:

–крајње тачке сваке дужи из $\mathfrak{D}$ су неке две различите тачке из $\mathfrak{T}$;

–свака тачка из $\mathfrak{T}$ различита од A и B је крајња тачка највише две дужи из $\mathfrak{D}$;

–за сваке две тачке из $\mathfrak{T}$ постоји изломљена линија састављена од дужи из $\mathfrak{D}$ која их повезује;

–укупан број троуглова који се може формирати од дужи из $\mathfrak{D}$ једнак је 9;

–укупан број затворених изломљених линија које се састоје од 4 дужи из $\mathfrak{D}$ једнак је 9.

(а) Доказати да скупу $\mathfrak{D}$ припада дуж чије су крајње тачке A и B.

(б) Одредити број тачака из $\mathfrak{T}$ које су спојене и са тачком A и са тачком B дужима из скупа $\mathfrak{D}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Први разред – Б категорија

1. На забаву је позвано 60 људи. Очекује се да одзив гостију буде 75%. Кувар је рекао да му је потребно 5 килограма брашна како би припремио кифле масе 120 грама, тако да сваки гост који дође на забаву добије по две кифле. Међутим, кувару је грешком испоручен килограм брашна мање, те је решио да масу сваке кифле смањи за трећину. Колико посто може бити највећи одзив гостију, да би свако добио по две кифле?

2. У неком граду је убијен извесни ватрогасац Пожаревић. Полиција је ухапсила тројицу сумњивих људи: професора Алгебрића, програмера Алгоритмића и лекара Андоловића. Судија је знао да је један од њих убица. На саслушању су изјавили следеће:

(1) Алгебрић: „Нисам убица. Никада раније нисам видео Алгоритмића. Познавао сам покојног Пожаревића."

(2) Алгоритмић: „Нисам убица. Са Алгебрићем и Андоловићем сам често играо покер. Алгебрић није убица."

(3) Андоловић: „Нисам убица. Алгебрић не говори истину када каже да никада није видео Алгоритмића. Алгебрић није познавао убијеног."

Уколико је свако од њих дао две истините и једну неистиниту изјаву, откријте ко је убица.

3. Нека су AA_1, BB_1 и CC_1 тежишне дужи, а T тежиште троугла ABC. Нека је тачка M средиште дужи TA_1, а тачка N средиште дужи TB_1. Ако је површина троугла ABC једнака P, одредити површину троугла MNC_1.

4. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + 2022y &= 2022, \\ \big||x| - |y|\big| &= 1. \end{aligned}$$

5. Одредити све природне бројеве a, b, c за које важи $ab = 2022$ и $a + b = c^3$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Други разред – Б категорија

1. Колико има парова целих бројева (m, n) за које важи

$$m^2 \leqslant n \leqslant m + 6?$$

2. Колико има различитих реалних бројева x за које је број $\sqrt{2022 - \sqrt{x}}$ природан?

3. Доказати да не постоје непарни цели бројеви x, y, z за које је

$$(x + y)^2 + (x + z)^2 = (y + z)^2.$$

4. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 50^\circ$ и $\sphericalangle BAC = 70^\circ$. Симетрала угла код темена A сече описани круг троугла ABC у тачки D. Одредити величине унутрашњих углова четвороугла $ABDC$.

5. Одредити број решења једначине

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + \ldots + x_{2021}x_{2022} + x_{2022}^2 = 1$$

у скупу целих бројева.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако су a, b, c реални бројеви, тако да је $a+b+c=0$ и $a^4+b^4+c^4=50$, одредити $ab+bc+ca$.

2. Одредити сва реална решења једначине $2^{2^x} - 3 \cdot 2^{2^{x-1}+1} + 8 = 0$.

3. Стране коцке, чија је страница дужине 2022, су обојене црвеном бојом. Након тога је коцка разрезана на коцке чије су странице дужине 2, а необојене стране добијених коцки су обојене белом бојом. Одредити однос површина обојених црвеном и белом бојом.

4. У троуглу ABC угао код темена A једнак је $90°$, а угао код темена C једнак је $70°$. Нека је P тачка дужи AB, таква да је $\sphericalangle ACP = 30°$, а Q тачка дужи AC таква да је $\sphericalangle CPQ = 20°$. Доказати да је права BQ симетрала угла код темена B троугла ABC.

5. Одредити све целе бројеве n такве да је број $(n+1)(n+2021)(n+2022)+4041$ прост.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2022.

Четврти разред – Б категорија

1. Први члан аритметичког низа је 24. Одредити 2022. члан тог низа, ако први, пети и једанаести члан истог низа представљају три узастопна члана геометријског низа.

2. Ако је

$$42! = 1405006ab7752879898543142606244511569936384000000000,$$

одредити непознате цифре a и b.

3. Одредити све $a \in \mathbb{R}$, такве да су сви корени полинома

$$p(x) = x^6 - 16x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 36$$

природни бројеви.

4. У зависности од $a \in \mathbb{R}$ решити систем

$$\begin{array}{ccccccc} a\sin^2 x & + & \sin^2 y & + & \sin^2 z & = & 1, \\ \cos^2 x & + & a\cos^2 y & + & \cos^2 z & = & 2, \\ \cos 2x & + & \cos 2y & + & a\cos 2z & = & -2a^2 + a + 2. \end{array}$$

5. Петоугао $ABCDE$ уписан је у круг. Ако је $AB = CD = 1$, $BC = DE = \sqrt{2}$ и $\sphericalangle ACE = 30^\circ$, одредити дужину дужи EA.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Нека су уочене тачке $X_1, \ldots, X_{2021}$. Како X_i не припада AB, следи $|X_iA - X_iB| = AB$ за свако $1 \leqslant i \leqslant 2021$. Ако је $X_1A + \ldots + X_{2021}A = X_1B + \ldots + X_{2021}B$, онда је $\sum\limits_{i=1}^{2021}(X_1A - X_iB) = 0$, а по претходном сваки сабирак у претходној суми једнак или AB или $-AB$. Последње је немогуће, пошто је $AB \neq 0$, а наведена сума се састоји од непарног броја сабирака.

2. Ако је $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, онда је f строго растућа. За $a, b \geqslant 0$ важи $f(a+b) = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = f(a) + f(b)$ и притом се једнакост достиже ако и само ако је $ab = 0$. Следи $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = f(|x+y|) \leqslant f(|x| + |y|) \leqslant f(|x|) + f(|y|) = \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$ и притом се једнакост достиже ако и само ако је $|x + y| = |x| + |y|$ и $|xy| = 0$, односно ако и само ако је макар један од бројева x и y једнак 0. Дакле, скуп решења наведене једначине је $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\big\}$ (Тангента, М1712).

3. Ако је $q = 2$, решење је сваки прост број p. Ако је $q \neq 2$, онда је $q = 2k + 1$ за неко $k \in \mathbb{N}$, односно $(p^3+1)^q = (p^3+1)^{2k} \cdot (p^3+1)$, па је p^3+1 квадрат природног броја. Ако је $p^3+1 = n^2$, следи $p^3 = (n-1)(n+1)$, а како је p прост и $0 < n-1 < n+1$, мора бити $n-1 = 1$, $n+1 = p^3$ или $n-1 = p$, $n+1 = p^2$. У првом случају је $n = 2$ и $p^3 = 3$, што не доводи до решења, а у другом $p^2 = p + 2$, одакле је $p = -1$ (што је немогуће) или $p = 2$.

Дакле, наведени број је квадрат природног броја за парове облика $(2, q)$, где је q прост број и $(p, 2)$, где је p прост број.

4. Како је композиција линеарних функција такође линеарна функција, то је $f(g(x)) = \alpha x + \beta$ и $g(f(x)) = \gamma x + \delta$, за неке $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Како график функције $f(g(x))$ садржи тачку $(2021, 2022)$ следи $2021\alpha + \beta = 2022$, како график функције $g(f(x))$ садржи тачку $(2022, 2021)$ следи $2022\gamma + \delta = 2021$, а из услова $f(g(x)) - g(f(x)) = 2$ следи $(\alpha - \gamma)x + \beta - \delta = 2$, тј. $\alpha = \gamma$, $\beta - \delta = 2$. Следи $\alpha = \gamma = \beta = 1$, $\delta = -1$, односно $f(g(x)) = x + 1$, $g(f(x)) = x - 1$.

Нека је $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Онда је $f(g(x)) = a(cx + d) + b = acx + ad + b = x + 1$ и $g(f(x)) = cax + cb + d = x - 1$, па је $ac = 1$, $ad + b = 1$, $cb + d = -1$. Следи $-a = acb + ad = b + ad = 1$, па је $a = c = -1$, и $b - d = 1$. Дакле, важи $f(2021) = -2021 + b$, $g(2022) = -2022 + d$, одакле је $f(2021) - g(2022) = 1 + b - d = 2$.

5. Нека је $s = \frac{a+b+c}{2}$, h_c висина која одговара страници c, а P површина $\triangle ABC$. Онда је $P = rs$ и $P = \frac{ch_c}{2}$, па је $\frac{h_c}{r} = \frac{2s}{c} = \frac{a+b+c}{c} > 2$, на основу неједнакости троугла, тј. важи $r < \frac{h_c}{2}$, односно тачка S се налази између правих AB и DE. Како је $DE \parallel AB$, следи да је $\triangle ABS \sim \triangle DES$, а како је S између правих DE и AB, висине ових троуглова које одговарају тачки S су једнаке $\frac{h_c}{2} - r$ и r, редом. Следи $P(\triangle SDE) = \big(\frac{\frac{h_c}{2}-r}{r}\big)^2 \cdot P(\triangle ABS) = \frac{(h_c-2r)^2}{4r^2} \cdot \frac{cr}{2} = \frac{c(h_c-2r)^2}{8r}$. Како је $\frac{(h_c-2r)c}{2r} = \frac{ch_c}{2r} - c = \frac{2P}{2r} - c = s - c$, следи $h_c - 2r = \frac{2r(s-c)}{c}$, па је $P(\triangle SDE) = \frac{r(s-c)^2}{2c}$.

Коментар. Зарад компактификације записа, у претходном решењу је коришћена сличност, што није било неопходно. На пример, уколико су A_1 и B_1 средишта страница BC и CA, редом, онда су $\triangle BA_1E$ и $\triangle DB_1A$ једнакокраки, па узимајући у обзир распоред тачака, следи $DE = \frac{BA_1+AB_1-A_1B_1}{2} = \frac{a+b-c}{2} = s - c$, одакле је $P(\triangle SDE) = \frac{(s-c)(h_c-2r)}{4} = \frac{r(s-c)^2}{2c}$. Из истих разлога је решење изражено помоћу r, иако то није неопхпдно (у произвољном троуглу важи $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$).

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – А категорија

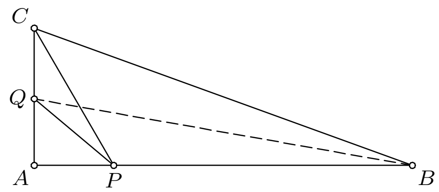
1. Мора бити $\frac{x^2-1}{x} \geqslant 0$ и $\frac{x-1}{x} \geqslant 0$, односно $x \in [-1,0) \cup [1,\infty)$ и $x \in (-\infty,0) \cup [1,\infty)$, тј. $x \in [-1,0) \cup [1,\infty)$. Како је $\sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} \geqslant 0$, једначина нема негативних решења, па је довољно посматрати $x \in [1,\infty)$. За $x \in [1,\infty)$ једначина је еквивалентна са

$$x^2 = x - \tfrac{1}{x} + 2\sqrt{\tfrac{x^2-1}{x} \cdot \tfrac{x-1}{x}} + 1 - \tfrac{1}{x} = x + 1 - \tfrac{2}{x} + \tfrac{2}{x} \cdot \sqrt{(x-1)^2(x+1)}, \text{ односно са}$$
$$2\sqrt{(x-1)^2(x+1)} = x^3 - x^2 - x + 2 = (x-1)^2(x+1) + 1,$$

тј. са $\left(\sqrt{(x-1)^2(x+1)} - 1\right)^2 = 0$. Следи $(x-1)^2(x+1) = 1$, односно $x(x^2-x-1) = 0$, па како је $x \in [1,\infty)$, једино решење једначине је $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Из $\triangle ABC$ је $\frac{BA}{BC} = \sin 70^\circ$. Важи $\sphericalangle PQA = \sphericalangle QPC + \sphericalangle PCQ = 50^\circ$, па из $\triangle APQ$ следи $\frac{AQ}{PQ} = \cos 50^\circ = \sin 40^\circ$. Применом синусне теореме у $\triangle QPC$ следи $\frac{QP}{CQ} = \frac{\sin \sphericalangle PCQ}{\sin \sphericalangle QPC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}$, па је

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{CQ} &= \frac{AQ}{PQ} \cdot \frac{PQ}{CQ} = \sin 40^\circ \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} \\ &= 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2\sin 20^\circ} \\ &= \cos 20^\circ = \sin 70^\circ = \frac{BA}{BC}.\end{aligned}$$



Опш–22–2А2

Дакле, важи $\frac{AQ}{CQ} = \frac{BA}{BC}$, што значи да је BQ симетрала $\sphericalangle ABC$.

3. Ако је m непаран, следи да су m^{2022} и n^{m-1} потпуни квадрати који се разликују за 2, што је немогуће. Ако је m паран, онда је $m^{2022}+2 \equiv 2 \pmod 4$, па је и $n^{m-1} \equiv 2 \pmod 4$. Следи да $2 \mid n$, па мора бити $m-1 \leqslant 1$, одакле је $m=2$ и $n = 2^{2022}+2$.

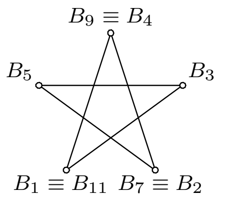
4. Ако је $b=0$, трећа једначина је $2x+a=0$ и има реално решење $x = -\frac{a}{2}$. Ако је $b \neq 0$ и $a=0$, друга једначина је $2bx+1=0$ и има реално решење $x = -\frac{1}{2b}$.

Ако је $a \neq 0$ и $b \neq 0$, наведене једначине су квадратне. Ако ниједна од њих нема реалних решења, њихове дискриминанте су негативне, тј. важи $4a^2-4b<0$, $4b^2-4a<0$, $4-4ab<0$, односно $b>a^2$, $a>b^2$, $ab>1$. Из $a>b^2$ и $b>a^2$ следи $a,b>0$, па се множењем те две неједнакости добија $ab>a^2b^2$. Следи $ab>0$, па је $ab<1$, а то је у контрадикцији са трећом добијеном везом. Следи да бар једна од наведених једначина има реалних решења.

5. Уколико је $A_1A_2\ldots A_n$ изломљена линија која задовољава наведене услове, онда свака од дужи $A_3A_4, A_4A_5, \ldots, A_{n-1}A_n$ сече дуж A_1A_2, а како никоје три међу уоченим тачкама нису колинеарне, следи да се тачке A_i и A_{i+1}, за свако $2<i<n$, налазе у различитим полуравнима одређеним правом A_1A_2.

Уколико је n парно, последње значи да A_3 и A_n припадају различитим полуравнима одређеним правом A_1A_2, те се дужи A_nA_1 и A_2A_3 не могу сећи, па у овом случају не постоји изломљена линија са наведеним особинама.

Уколико је n непарно, тј. $n=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, нека је $B_1B_2\ldots B_{2k+1}$ правилан $(2k+1)$-тоугао и нека је изломљена линија добијена спајањем темена $B_{1+(i-1)k}$ и B_{1+ik} за $1 \leqslant i \leqslant 2k+1$, при чему се сматра да је теме B_{1+j} заправо теме $B_{1+j'}$, где је $j' \in \{0,\ldots,2k\}$ и $j' \equiv j \pmod{2k+1}$, уколико је $j>2k+1$. Како је $(k,2k+1)=1$, скуп $\{1+ik \,|\, 0 \leqslant i \leqslant 2k\}$ чини потпун систем остатака при дељењу са $2k+1$, па ће сва темена $(2k+1)$-тоугла припадати



Опш–22–2А5

овој изломљеној линији. За $j \notin \{i-k, i, i+k\}$, како B_iB_{i+k} и B_jB_{j+k} представљају дијагонале правилног $(2k+1)$-тоугла које повезују темена на растојању k (тј. којима одговара централни угао $\frac{2k\pi}{2k+1}$) и које немају заједничко теме, те дужи се секу, одакле следи да ова изломљена линија задовољава захтеване услове (у питању је „n-тострана звезда”; на слици Опш–22–2А5 је приказана описана конструкција у случају $n = 5$).

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – А категорија

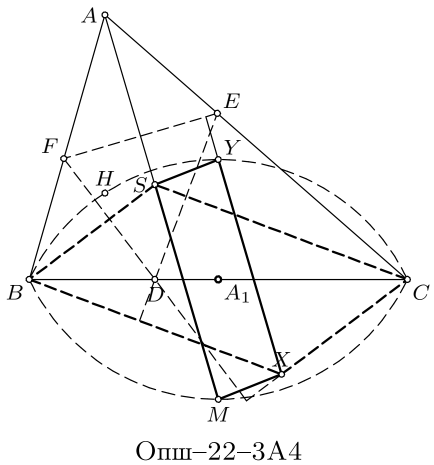
1. Како је $n!-1 = n\cdot(n-1)!-1 \geqslant 2\cdot(n-1)!+\big((n-1)!-1\big)+\ldots+\big(2!-1\big) > \big((n-1)!-1\big)+\ldots+\big(2!-1\big)$ за $n \geqslant 3$, збир елемената који припадају подскупу који садржи $n!-1$ ће бити већи од збира чланова другог подскупа. Следи да се захтевана подела не може извршити ни за једно n.

2. Ако је $\frac{p}{q}$ решење наведене једначине, где је $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(p,q)=1$, важи $p^2+2mpq+2nq^2=0$, па како су наведени бројеви цели, следи да је p паран број. Следи $p=2p_1$ за неко $p_1 \in \mathbb{Z}$, одакле је $4p_1^2+4mp_1q+2nq^2=0$, па је $2p_1^2+2mp_1q+nq^2=0$, односно и nq^2 је паран број. Међутим, како је број n непаран, последње значи да $2 \mid q$, а то је немогуће, пошто је $(p,q)=1$. Дакле, наведена једначина нема рационалних решења.

3. Нека је $s = x_1+x_2+\ldots+x_{2022}$. Сабирањем свих једначина наведеног система добија се $s+2s+\ldots+2022s = 1+2+\ldots+2022$, одакле је $s=1$. За $1 \leqslant i \leqslant 2021$, одузимањем i-те и $i+1$-ве једначине добија се $x_1+\ldots+x_{2022}-2022x_i = i-(i+1)$, тј. $s-2022x_i=-1$, па је $x_i = \frac{s+1}{2022} = \frac{2}{2022}$, док се одузимањем последње и прве једначине добија $x_1+\ldots+x_{2021}-2022x_{2022}=2021$, одакле је $x_{2022} = \frac{s-2021}{2022} = -\frac{2020}{2022}$.

4. Како су $\triangle BDF$ и $\triangle CED$ једнакокраки (једнакост тангентних дужи), следи $BS \perp DF$ и $CS \perp ED$, па је $BS \parallel CX$ и $CS \parallel BX$. Следи да је четвороугао $BXCS$ паралелограм, па је средиште дужи BC, тачка A_1, истовремено и средиште дужи SX.

Ако је M средиште лука BC описаног круга $\triangle ABC$ који не садржи тачку A, онда је $A-S-M$. Тачка H, а самим тим и Y, припада истој полуравни одређеној правом BC као и тачка A, пошто је $\triangle ABC$ оштоугли, а како тачка симетрична са H у односу на A_1 припада описаном кругу $\triangle ABC$, следи да су лук BC којем припада тачка H описаног круга $\triangle BCH$ и лук BC којем припада тачка M описаног круга $\triangle ABC$ симетрични, па је Y симетрична тачки M у односу на A_1.



Опш–22–3А4

Дакле, четвороугао $SMXY$ је паралелограм (тачка A_1 је средиште и дужи MY и дужи SX), па је $XY \parallel SM$, па како је $AM \perp EF$, следи $XY \perp EF$.

5. Нека је $\Sigma(A)$ збир елемената скупа $A \subseteq S$, $\mathcal{P} = \big\{(A,B) \,|\, A\cap B = \emptyset, A\cup B = S, \Sigma(A) \geqslant \Sigma(B)\big\}$, $\mu = \min\limits_{(A,B)\in\mathcal{P}} \big(\Sigma(A)-\Sigma(B)\big) \geqslant 0$ и $(X,Y)\in\mathcal{P}$ неки пар за који се овај минимум достиже. Онда је $\Sigma(X)+\Sigma(Y)=s$, а како је $\Sigma(X)\geqslant\Sigma(Y)$, следи $\Sigma(Y)\leqslant\frac{s}{2}$. Ако је $x\in X$ произвољан, на основу избора пара (X,Y) следи

$$\begin{aligned} 0 &> \Sigma\big(X\setminus\{x\}\big)-\Sigma\big(Y\cup\{x\}\big) = \Sigma(X)-x-(\Sigma(Y)+x) \\ &= \Sigma(X)-\Sigma(Y)-2x = 2\cdot\Sigma(X)-s-2x = 2\cdot\Sigma\big(X\setminus\{x\}\big)-s, \end{aligned}$$

па је $\Sigma\big(X\setminus\{x\}\big) < \frac{s}{2}$. Дакле, сваки $x\in X$ је раздвајач, па је збир свих раздвајача не мањи од $\Sigma(X)\geqslant\frac{s}{2}$.

Ако је $s>\varepsilon>0$ и $S=\big\{\frac{s}{2}-\varepsilon, \frac{s}{2}+\varepsilon\big\}$, онда је елемент $\frac{s}{2}+\varepsilon$ једини раздвајач, па је збир свих раздвајача $\frac{s}{2}+\varepsilon$. Како ε може бити произвољно блиско нули, следи да се наведена процена не може побољшати.

Друго решење. Нека је $\Sigma(A)$ збир елемената скупа $A\subseteq S$, X скуп свих раздвајача скупа S и $S\setminus X = \{x_1,\ldots,x_k\}$. Ако је $\Sigma(X)<\frac{s}{2}$, како је $\Sigma(X)<\Sigma\big(X\cup\{x_1\}\big)<\Sigma\big(X\cup\{x_1,x_2\}\big)<\ldots<\Sigma\big(X\cup\{x_1,\ldots,x_k\}\big)=s$, постоји $1\leqslant i\leqslant k$ тако да је је $\Sigma\big(Y\setminus\{x_i\}\big)<\frac{s}{2}\leqslant\Sigma(Y)$, где је

$Y = X \cup \{x_1, \ldots, x_i\}$. Међутим, онда је x_i раздвајач, што је у контрадикцији са избором скупа X, па мора бити $\Sigma(X) \geqslant \frac{s}{2}$.

Треће решење. Нека су $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ сви елементи скупа S. Како је $x_1 + \ldots + x_n = s$, постоји $k \in \{1, \ldots, n\}$, тако да је $\sum\limits_{i<k} x_i < \frac{s}{2} \leqslant \sum\limits_{i\leqslant k} x_i$. Онда је x_k раздвајач, а како је сваки елемент који је већи од раздвајача и сам раздвајач (заиста, за $j > k$ збирови елемената скупова $\{x_i \,|\, i < k\}$ и $\{x_i \,|\, i \geqslant k, i \neq j\}$ су не већи од $\frac{s}{2}$), следи да је збир раздвајача барем $\sum\limits_{i\geqslant k} x_i = s - \sum\limits_{i<k} x_i \geqslant \frac{s}{2}$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – А категорија

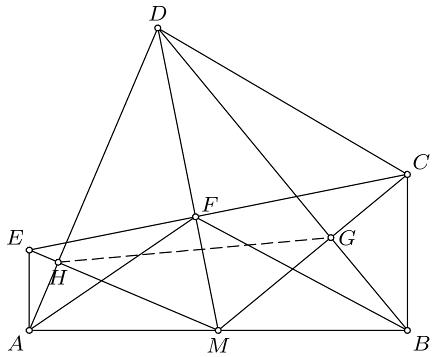
1. Нека је H пресек правих ME и AD, а G пресек правих MC и BD. Како је $\triangle MHA \sim \triangle MAE$ и $\triangle MGB \sim \triangle MBC$, следи $MA^2 = MH \cdot ME$ и $MB^2 = MC \cdot MG$, па како је $MA = MB$, следи $MH \cdot ME = MC \cdot MG$, тј. $EHGC$ је тетиван. Следи $\sphericalangle CEM = \sphericalangle CEH = \sphericalangle MGH$.

Како је и $DHMG$ тетиван (прави углови код темена G и H), важи $\sphericalangle HMD = \sphericalangle HGD$, одакле је $\sphericalangle FEM + \sphericalangle EMD =$

$$\sphericalangle CEH + \sphericalangle HMD = \sphericalangle MGH + \sphericalangle HGD = 90^\circ,$$

тј. $DM \perp CE$, па су четвороуглови $AMFE$ и $MBCF$ тетивни.

Из добијеног следи $\sphericalangle FEM = \sphericalangle FAM$ и $\sphericalangle MCF = \sphericalangle MBF$, па је $\triangle FAB \sim \triangle MEC$, одакле је $\sphericalangle BFA = \sphericalangle EMC$.



Опш–22–4А1

2. Како је у питању квадратна функција, важи $a \neq 0$.

Ако је $b = c$ важи $2ab^2 = f(a) = a^3 + ab + b$ и $ab^2 = f(b) = ab^2 + b^2 + b$. Из друге добијене везе следи $b(b+1) = 0$, тј. $b \in \{-1, 0\}$. Ако је $b = 0$, из прве добијене везе следи $a^3 = 0$, тј. $a = 0$, што је немогуће. Ако је $b = -1$, прва веза постаје $p(a) = a^3 - 3a - 1 = 0$. Како је p полином, непрекидна је функција, па како је $p(-2) = -3 < 0$, $p(-1) = 1 > 0$, $p(0) = -1 < 0$, $p(2) = 1 > 0$, има бар једну нулу на сваком од интервала $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,2)$, а како је $\deg p = 3$, следи да p има тачно три нуле $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, тако да је $-2 < \alpha_1 < -1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3 < 2$. Са друге стране, за свако $i \in \{1,2,3\}$, полином $f_i(x) = \alpha_i x^2 - x - 1$ задовољава услове задатка, пошто је $f_i(-1) = \alpha_i = \alpha_i \cdot (-1) \cdot (-1)$ и $f_i(\alpha_i) = \alpha_i^3 - \alpha_i - 1 = p(\alpha_i) + 2\alpha_i = 2\alpha_i = 2 \cdot \alpha_i \cdot (-1) \cdot (-1)$.

Ако је $b \neq c$, следи да су b и c нуле квадратне функције $f(x) - abc$, па је $f(x) = a(x-b)(x-c) + abc$. Следи $2abc = f(a) = a(a-b)(a-c) + abc$, а изједначавањем коефицијената полинома у добијеној вези се добија $b = -a(b+c)$ и $c = 2abc$, па како је $a \neq 0$, следи $a = b + c$, $c(2ab-1) = 0$ и $b = -a(b+c) = -a^2$. Из добијеног је $c(2a^3+1) = 0$, па је $c = 0$ или $2a^3 + 1 = 0$. У првом случају је $a = b$, па пошто је $b = -a^2$, важи $a^2 + a = 0$, а како је $a \neq 0$, следи $a = b = -1$, $c = 0$. У другом је $2a^3 = -1$, па је $a = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $b = -a^2 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ и $c = a - b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Са друге стране, полиноми $f_4(x) = -x^2 - x$ и $f_5(x) = -\beta x^2 - \beta^2 x + \beta^2 - \beta$, где је $\beta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, задовољавају услове задатка, пошто је $f_4(-1) = f_4(0) = 0$, а како је $\beta^3 = \frac{1}{2}$, важи $I = abc = (-\beta)(-\beta^2)(\beta^2 - \beta) = \frac{\beta^2-\beta}{2}$, па је $f_5(-\beta) = -\beta^3 + \beta^3 + \beta^2 - \beta = \beta^2 - \beta = 2I$, $f_5(-\beta^2) = -\beta^5 + \beta^4 + \beta^2 - \beta = -\frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta}{2} + \beta^2 - \beta = \frac{\beta^2-\beta}{2} = I$ и $f_5(\beta^2 - \beta) = -\beta(\beta^2-\beta)^2 - \beta^2(\beta^2-\beta) + \beta^2 - \beta = (\beta^2-\beta)(-\beta^3+1) = \frac{\beta^2-\beta}{2} = I$.

Дакле, постоји 5 тројки реалних бројева које задовољавају наведене услове.

3. Ако је $n = 2022 \cdot m$, где је m број чије су цифре у декадном запису из $\{0,2\}$, приликом стандардног множења „потписивањем”, уколико је део његовог декадног записа $\cdots edcba \cdots$, $a,b,c,d,e \in \{0,2\}$, настаће таблица чији је део облика

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 2a & 0 & \cdots \\
 & & & 2b & 0 & 2b & \cdots \\
 & & 2c & 0 & 2c & 2c & \\
 & 2d & 0 & 2d & 2d & & \\
\cdots & 0 & 2e & 2e & & &
\end{array}.$$

Збир бројева у произвољној колони ове таблице једнак је збиру највише 3 броја облика $2x$, где је $x \in \{0,2\}$, тј. не већи је од 12, па „пренос” на декадно место више вредности може бити највише 1. Дакле, збир елемената произвољне колоне је облика $2(b+d+e) + \delta$

(погледати трећу колону у претходној таблици), где су $b, d, e \in \{0, 2\}$, а $\delta \in \{0, 1\}$, а цифра α се појављује у резултату ако је $\alpha = 2(b + d + e) + \delta$ или $\alpha = 2(b + d + e) + \delta - 10$. Како је $2(0+0+0)+\delta = 0+\delta$, $2(2+0+0)+\delta = 4+\delta$, $2(2+2+0)+\delta = 8+\delta$, $2(2+2+2)+\delta-10 = 2+\delta$, следи да се на овај начин не могу добити цифре 6 и 7. Међутим, не може се добити ни цифра 1, пошто би у том случају морало бити $b = d = e = 0$ и $\delta = 1$, но то би онда значило да је $10 \leqslant 2(a + c + d) = 2(a + c) \leqslant 8$ (видети четврту колону претходне таблице).

Са друге стране, могуће је добити све цифре из скупа $\{0, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$, што се види на пример из $2022 \cdot 2\,222\,200\,002\,202 = 4\,493\,288\,404\,452\,444$.

4. За $n \in \mathbb{N}$, да би једначина била дефинисана, мора бити $n^2 - 6 > 0$, тј. $n \geqslant 3$. За такве n је $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n$, па је $\log_{n+1}(n^2 + 3n) > 2$, као и $\big(2(n-1)\big)^3 - n^3 = (n-2)\big(4(n-1)^2 + 2(n-1)n + n^2\big) \geqslant 1 \cdot (4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2) = 37 > 9$, одакле је $\big(2(n-1)\big)^3 > n^3 + 9$, па је $\log_{2(n-1)}(n^3 + 9) < 3$. Следи $\log_{3n}(n^2 - 6) = \log_{2(n-1)}(n^3 + 9) - \log_{n+1}(n^2 + 3n) < 1$, па је $n^2 - 6 < 3n$, одакле следи $n \leqslant 4$.

Ако је $n = 4$, онда важи $\log_{n+1}(n^2 + 3n) = \log_5 28 > 2$, $\log_{3n}(n^2 - 6) = \log_{12} 10 > \frac{1}{2}$ и $\log_{2(n-1)}(n^3 + 9) = \log_6 73 < \frac{5}{2}$, па $n = 4$ није решење. Ако је $n = 3$, онда је $\log_{n+1}(n^2 + 3n) + \log_{3n}(n^2 - 6) = \log_4 18 + \log_9 3 = \log_4 18 + \frac{1}{2} = \log_4 18 + \log_4 2 = \log_4 36 = \log_{2(n-1)}(n^3 + 9)$, па $n = 3$ јесте решење наведене једначине.

5. По наведеним условима, граф чији су чворови из скупа $\mathfrak{T}$, а гране из скупа $\mathfrak{D}$ је прост, повезан, степен сваког чвора различитог од A и B је највише 2, а број циклова дужине 3, односно 4, је 9. Следи да сваки затворен цикл (међу којима су и они дужина 3 и 4) мора садржати бар један од чворова A и B (степени чворова цикла су 2, па се ниједан чвор тог цикла не би могао повезати са осталим чворовима графа).

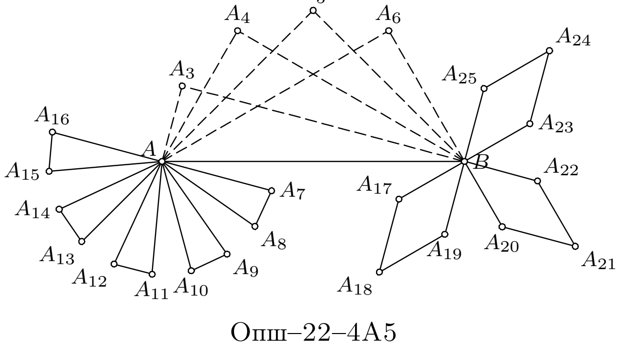
Уколико цикл дужине 3 садржи тачно један од чворова A и B он је облика $A - A_i - A_j - A$ или $B - A_i - A_j - B$ за неке $A_i \neq A_j$ (и наравно, A_i и A_j су различити од A и B), па како су степени чворова A_i и A_j не већи од 2, ова два чвора не могу бити саставни део било ког другог цикла. Нека таквих циклова има t. Преостали циклови дужине 3 могу настати само ако је AB грана графа, а има их s, где је s број чворова који су повезани и са A и са B. Дакле, циклова дужине 3 у уоченом графу је $t + \delta s = 9$, где је вредност δ једнака 1 ако је AB грана уоченог графа, а једнака 0 ако то није.

Слично, ако цикл дужине 4 садржи само један од чворова A и B, он је облика $A - A_i - A_j - A_k - A$ или $B - A_i - A_j - A_k - B$, где су A_i, A_j, A_k различити чворови и ти чворови не могу бити саставни део било ког другог цикла. Нека је c број таквих циклова. Уколико цикл дужине 4 садржи и A и B, ако је облика $A - A_i - B - A_j - A$, онда су A_i и A_j повезани и са A и са B, па таквих циклова има $\binom{s}{2}$, а ако је AB грана графа, може бити облика $A - A_i - A_j - B - A$, а притом A_i и A_j не могу бити саставни део ниједног другог цикла. Уколико таквих циклова има r, следи да циклова дужине 4 има $c + \binom{s}{2} + \delta r = 9$. Из последњег следи да је $\binom{s}{2} \leqslant 9$, па је $s \leqslant 4$.

На основу добијеног у претходна два пасуса је $2 + 2t + s + 3c + 2r \leqslant 25$, пошто граф има 25 чворова, а циклови рачунати у t, c, r „потроше”, редом, $2, 3, 2$ чвора (који не могу учествовати у другим цикловима).

Ако је $\delta = 0$, онда је број циклова дужине 3 једнак t, а дужине 4 једнак $c + \binom{s}{2}$, па је $t = 9$ и $9 = c + \binom{s}{2} \leqslant c + \binom{4}{2} = c + 6$, тј. $c \geqslant 3$. Међутим, онда је $25 \geqslant 2 + 2t + 3c \geqslant 2 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 > 25$, што је немогуће, па следи прво тврђење.

Дакле, $\delta = 1$. Ако је $s \leqslant 3$, онда је $t = 9 - s \geqslant 6$ и $c + r = 9 - \binom{s}{2} \geqslant 6$, па је $25 \geqslant 2 + (t + s) + t + 2(c + r) \geqslant 2 + 9 + 6 + 2 \cdot 6 > 25$. Из добијене контрадикције следи $s = 4$. Постоји граф са наведеним особинама у којем је $s = 4$, на пример граф на слици Опш–22–4А5.



Опш–22–4А5

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. Очекивани број гостију је $0,75 \cdot 60 = 45$. Пошто је предвиђено да сваки од гостију добије по две кифле, потребно је 90 кифли, односно укупна маса кифли је $90 \cdot 0,12$ килограма. Слично, уколико је број гостију x, маса кифле $0,08$ килограма и сваки гост добије по 2 кифле, укупна маса кифли ће бити $2x \cdot 0,08$ килограма. Како кувар у првом случају располаже са 5, а у другом са 4 килограма брашна, следи $\frac{90 \cdot 0,12}{5} = \frac{2x \cdot 0,08}{4}$, одакле је $x = 54$, односно највећи одзив гостију може бити $\frac{54}{60} = 90\%$.

2. Друге и треће изјаве Алгебрића и Андоловића су контрадикторне, па како је свако од њих дао две истините и једну неистиниту изјаву, њихове прве изјаве су истините, односно они нису убице. Следи да је убица Алгоритмић (друга и трећа његова изјава нису контрадикторне са изјавама Алгебрића и Андоловића).

3. Нека је са $P(XYZ)$ означена површина троугла XYZ. Онда је $P(A_1B_1C_1) = \frac{P}{4}$, $P(TA_1B_1) = P(TB_1C_1) = P(TC_1A_1) = \frac{1}{3} \cdot P(A_1B_1C_1) = \frac{P}{12}$ (тачка T је тежиште $\triangle A_1B_1C_1$), као и $P(TMN) = \frac{P(TA_1B_1)}{4} = \frac{P}{48}$. Важи $P(TNC_1) = \frac{1}{2} \cdot P(TB_1C_1) = \frac{P}{24}$ (пошто је $TB_1 = 2 \cdot TN$, а висине које одговарају страницама TB_1 и TN у $\triangle TB_1C_1$ и $\triangle TNC_1$, редом, су једнаке), а аналогно је $P(TMC_1) = \frac{1}{2} \cdot P(TC_1A_1) = \frac{P}{24}$. Како тачка T припада унутрашњости $\triangle MNC_1$, следи $P(MNC_1) = P(TNC_1) + P(TMC_1) + P(TMN) = \frac{P}{24} + \frac{P}{24} + \frac{P}{48} = \frac{5}{48} \cdot P$.

4. Важи $x = 2022(1 - y)$.

Ако је $y \geqslant 1$, онда је $y > 0$ и $x \leqslant 0$, па друга једначина система постаје $|-x-y| = 1$, тј. $|x+y| = 1$. Следи $|2022 - 2021y| = 1$. Ако је $y \in \left(\frac{2022}{2021}, \infty\right)$, добија се $2021y - 2022 = 1$, па је $y = \frac{2023}{2021}$ и $x = -\frac{4044}{2021}$, што јесте решење наведеног система. Ако је $y \in \left[1, \frac{2022}{2021}\right]$, онда је $2022 - 2021y = 1$, па је $y = 1$ и $x = 0$, што је решење наведеног система.

Ако је $y < 1$, онда је $x > 0$. Ако је $y \in (-\infty, 0)$, друга једначина система постаје $|x+y| = 1$, па је $|2022 - 2021y| = 1$, одакле је $2022 - 2021y = 1$, тј. $y = 1$, што не даје решење, пошто је у овом случају $y < 0$. Ако је $y \in [0,1)$, друга једначина система постаје $|x-y| = 1$, па је $|2022 - 2023y| = 1$. Ако је $y \in \left(\frac{2022}{2023}, 1\right)$, добија се $2023y - 2022 = 1$, па је $y = 1$, што не даје решење, пошто је у овом случају $y < 1$. Ако је $y \in \left[0, \frac{2022}{2023}\right]$, добија се $2022 - 2023y = 1$, па је $y = \frac{2021}{2023}$ и $x = \frac{4044}{2023}$, што је решење наведеног система.

Дакле, решење наведеног система је $(x,y) \in \left\{(0,1), \left(-\frac{4044}{2021}, \frac{2023}{2021}\right), \left(\frac{4044}{2023}, \frac{2021}{2023}\right)\right\}$ (Тангента, М1695).

5. Како је $ab = 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, ако је $a \leqslant b$, следи $(a,b) \in \{(1,2022),(2,1011),(3,674),(6,337)\}$, па је $a + b \in \{2023, 1013, 677, 343\}$. Једини број из последњег скупа који је трећи степен природног броја је $343 = 7^3$, па је $c = 7$, односно решење наведеног система је $(a,b,c) \in \{(6,337,7),(337,6,7)\}$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

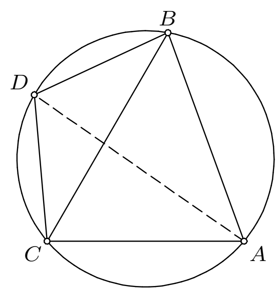
1. Како је $m^2 \leqslant m+6$, односно $(m-3)(m+2) \leqslant 0$ и $m \in \mathbb{Z}$, мора бити $m \in \{-2,-1,0,1,2,3\}$, а за такве m бројева n за које је $m^2 \leqslant n \leqslant m+6$ има $7+m-m^2$. Следи да парова који задовољавају наведене неједнакости има $\sum\limits_{m=-2}^{3}(7+m-m^2) = 1+5+7+7+5+1 = 26$.

2. Мора бити $0 \leqslant x$ и $\sqrt{x} \leqslant 2022$. Ако је $\sqrt{2022-\sqrt{x}} = n \in \mathbb{N}$, онда је $\sqrt{x} = 2022-n^2$. Ако је $n^2 > 2022$, стране последње једначине су различитих знака, па она нема решења. Са друге стране, за свако $n \in \mathbb{N}$ за које је $2022-n^2 \geqslant 0$ је $x = (2022-n^2)^2$ решење последње једначине. Следи да број x са наведеним особинама постоји ако и само ако је n природан број за који је $n^2 \leqslant 2022$, односно ако је $1 \leqslant n \leqslant 44$, па тражених бројева има 44 (Тангента, М1818).

3. Из наведеног услова следи $2x^2+2xy+2xz = 2yz$, тј. $x^2+xy+xz = yz$, одакле је $(x+y)(x+z) = 2yz$. Ако су x, y, z непарни цели бројеви, онда $2 \mid x+y$ и $2 \mid x+z$, па $4 \mid (x+y)(x+z)$, а са друге стране $4 \nmid 2yz$, па следи наведено тврђење.

4. Збир углова у $\triangle ABC$ је 180°, па је $\sphericalangle BCA = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle CAB = 60^\circ$. Како је AD симетрала угла BAC, важи $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = 35^\circ$. Следи $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = 35^\circ$, на основу једнакости периферијских углова над тетивом CD, па је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ$. Аналогно, на основу једнакости периферијских углова над тетивом BD је $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB = 35^\circ$, па је $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DCB + \sphericalangle BCA = 35^\circ + 60^\circ = 95^\circ$. Коначно, како је збир углова у четвороуглу једнак 360°, следи $\sphericalangle BDC = 360^\circ - \sphericalangle DCA - \sphericalangle CAB - \sphericalangle ABD = 360^\circ - 95^\circ - 70^\circ - 85^\circ = 110^\circ$.

Дакле, величине унутрашњих углова четвороугла $ABDC$ су 70°, 85°, 110° и 95°.



Опш–22–2Б4

5. Једначина је еквивалентна са $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + \ldots + 2x_{2021}x_{2022} + 2x_{2022}^2 = 2$, односно са $x_1^2 + \sum\limits_{n=2}^{2022}(x_{n-1}+x_n)^2 + x_{2022}^2 = 2$, тј. са $\sum\limits_{n=1}^{2023} y_n^2 = 2$, где је $y_1 = x_1$, $y_n = x_{n-1}+x_n$ за $2 \leqslant n \leqslant 2022$ и $y_{2023} = x_{2022}$. Притом су бројеви $(y_n)_{n=1}^{2023}$ цели ако и само ако су бројеви $(x_n)_{n=1}^{2022}$ цели. Такође, избор бројева $(x_n)_{n=1}^{2022}$ једнозначно одређује избор бројева $(y_n)_{n=1}^{2023}$ за које важи $\sum\limits_{n=1}^{2023}(-1)^n y_n = 0$, а важи и обрнуто, било који избор бројева $(y_n)_{n=1}^{2023}$ за које важи $\sum\limits_{n=1}^{2023}(-1)^n y_n = 0$ једнозначно одређује избор бројева $(x_n)_{n=1}^{2022}$ (из веза $x_1 = y_1$ и $x_n = y_n - x_{n-1}$ за $2 \leqslant n \leqslant 2022$ се добијају $(x_n)_{n=1}^{2022}$, а наведени услов обезбеђује да је и једначина $y_{2023} = x_{2022}$ задовољена).

Како је $\sum\limits_{n=1}^{2023} y_n^2 = 2$ и како су y_n цели, за $1 \leqslant n \leqslant 2023$, следи да је $y_i^2 = y_j^2 = 1$ за неке $1 \leqslant i < j \leqslant 2023$, док је $y_k = 0$ за $k \notin \{i,j\}$. Следи да је $y_i, y_j \in \{-1,1\}$, међутим, због услова $\sum\limits_{n=1}^{2023}(-1)^n y_n = 0$, избор y_i једнозначно одређује y_j, а како је утврђено, такав избор једнозначно одређује избор целих $(x_n)_{n=1}^{2022}$ који задовољавају наведену једначину. Пар (i,j) при услову $1 \leqslant n \leqslant 2023$ се може изабрати на $\binom{2023}{2}$ начина, након тога се на 2 начина може изабрати $y_i \in \{-1,1\}$, а то по утврђеном једнозначно одређује сваки $(x_n)_{n=1}^{2022}$ који задовољава услове задатка, па је број решења наведене једначине у скупу целих бројева једнак $2 \cdot \binom{2023}{2} = 2022 \cdot 2023$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – Б категорија

1. Из $a+b+c=0$ следи $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$, па је $a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8abc(a+b+c)$, односно, уз услове задатка, следи $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=25$. Како је $(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$, следи $(ab+bc+ca)^2=25$, а пошто је $ab+bc+ca=-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\leqslant 0$, следи $ab+bc+ca=-5$.

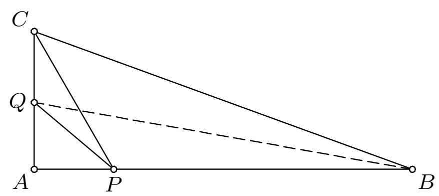
Коментар. Постоје реални бројеви са наведеним особинама. На пример, бројеви $a=\sqrt{5}$, $b=-\sqrt{5}$, $c=0$ задовољавају наведене услове.

2. Ако је $y=2^{x-1}$, следи $2^{2y}-3\cdot 2^{y+1}+8=0$, тј. $2^{2y}-6\cdot 2^y+8=0$, односно $(2^y-2)(2^y-4)=0$, па је $2^y\in\{2,4\}$. Ако је $2^y=2$, следи $y=1$, тј. $2^{x-1}=1$, па је $x=1$. Ако је $2^y=4$, следи $y=2$, тј. $2^{x-1}=2$, па је $x=2$.

3. Површина обојена црвеном бојом једнака је површини коцке странице 2022, односно $6\cdot 2022^2$. Након разрезивања, добија се 1011^3 коцки странице 2, њихова укупна површина је $1011^3\cdot 6\cdot 2^2=1011\cdot 6\cdot 2022^2$, па је површина обојена белом бојом једнака $1011\cdot 6\cdot 2022^2-6\cdot 2022^2$. Дакле, однос површина обојених црвеном и белом бојом једнак је $\frac{6\cdot 2022^2}{1011\cdot 6\cdot 2022^2-6\cdot 2022^2}=\frac{1}{1011-1}=\frac{1}{1010}$ (Тангента, М1756).

4. Из $\triangle ABC$ је $\frac{BA}{BC}=\sin 70^\circ$. Важи $\sphericalangle PQA=\sphericalangle QPC+\sphericalangle PCQ=50^\circ$, па из $\triangle APQ$ следи $\frac{AQ}{PQ}=\cos 50^\circ=\sin 40^\circ$. Применом синусне теореме у $\triangle QPC$ следи $\frac{QP}{CQ}=\frac{\sin\sphericalangle PCQ}{\sin\sphericalangle QPC}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}$, па је

$$\begin{aligned}\frac{AQ}{CQ} &= \frac{AQ}{PQ}\cdot\frac{PQ}{CQ}=\sin 40^\circ\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}\\ &= 2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cdot\frac{1}{2\sin 20^\circ}\\ &= \cos 20^\circ=\sin 70^\circ=\frac{BA}{BC}.\end{aligned}$$



Опш–22–3Б4

Дакле, важи $\frac{AQ}{CQ}=\frac{BA}{BC}$, што значи да је BQ симетрала $\sphericalangle ABC$.

5. Како бројеви 1, 2021, 2022 дају остатке 1, 2, 0, редом, при дељењу са 3, барем један од бројева $n+1$, $n+2021$, $n+2022$ је дељив са 3, па је и $(n+1)(n+2021)(n+2022)+4041$ дељив са 3. Како је у питању прост број, мора бити једнак 3, односно важи

$$(n+1)(n+2021)(n+2022)=-4038=-2\cdot 3\cdot 673.$$

Следи да је бар један од бројева $n+1$, $n+2021$, $n+2022$ дељив са 673. Уколико то није $n+1$, онда је $\big|(n+2021)(n+2022)\big|\geqslant 673\cdot 672$, те не би могла да важи добијена једнакост, па $673\mid n+1$. Како је $n+1<n+2021<n+2022$ и како је производ наведена три броја негативан, $n+1$ мора бити негативан, а $n+2021$ и $n+2022$ су истог знака. Ако је $n+2022$ негативан, пошто су у питању цели бројеви, онда важи $n+2022\leqslant -1$, $n+2021\leqslant -2$ и $n+1\leqslant -2022$, па је $\big|(n+1)(n+2021)(n+2022)\big|\geqslant 2\cdot 2022>4038$, што је немогуће. Следи да је $n+2022>n+2021>0$, па како су у питању цели бројеви, важи $n\geqslant -2020$. Ако је $n\geqslant -2018$, онда је $n+2021\geqslant 3$ и $n+2022\geqslant 4$, па како $673\mid n+1$, следи $\big|(n+1)(n+2021)(n+2022)\big|\geqslant 3\cdot 4\cdot 673>4038$, што је немогуће. Следи $n\in\{-2020,-2019\}$, па како $673\mid n+1$, мора бити $n=-2020$, што јесте број са наведеним својствима.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – Б категорија

1. Ако је уочени аритметички низ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и d његов корак, важи $a_n = a_1+(n-1)d$ за $n \in \mathbb{N}$. По условима задатка је $a_1a_{11} = a_5^2$, односно $24\cdot(24+10d) = (24+4d)^2$, па је $d^2-3d = 0$, односно $d \in \{0, 3\}$. Ако је $d = 0$, онда је $a_{2022} = 24$, а ако је $d = 3$, онда је $a_{2022} = 24 + 2021\cdot 3 = 6\,087$.

2. Како је 42! дељив са 9, следи да је збир цифара овог броја дељив са 9, одакле следи да $9 \mid a+b+187$, односно $9 \mid a+b-2$. Како је 42! дељив са 11, следи да је број добијен као разлика збира цифара које се налазе на непарним и збира цифара које се налазе на парним местима у декадном запису дељив са 11, одакле следи да $11 \mid a-b+33$, односно $11 \mid a-b$. Како су a и b цифре, важи $-9 \leqslant a-b \leqslant 9$, па како $11 \mid a-b$, следи $a = b$. Како $9 \mid a+b-2$, следи $9 \mid a-1$, па како су a и b цифре, мора бити $a = b = 1$.

3. По Вијетовим правилима је $x_1+\ldots+x_6 = 16$ и $x_1\cdot\ldots\cdot x_6 = 36$, где су $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_6$ корени полинома p. Како су у питању природни бројеви, морају бити из скупа $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Следи да је $x_1 \in \{3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. Не може бити $x_1 = 36$, као ни $x_1 = 18$, пошто би онда збир корена био већи од 16. Ако је $x_1 = 12$, онда је $x_2\cdot\ldots\cdot x_6 = 3$, па је $x_2 = 3$ и $x_3 = \ldots = x_6 = 1$. Међутим, онда је $x_1+\ldots+x_6 = 18 \neq 16$, па у овом случају не постоји полином са наведеним особинама. Ако је $x_1 = 9$, онда је $x_2\cdot\ldots\cdot x_6 = 4$, па је или $x_2 = 4$, $x_3 = \ldots = x_6 = 1$ или $x_2 = x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, што у првом случају доводи до $x_1+\ldots+x_6 = 17 \neq 16$, а у другом доводи до решења $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (9, 2, 2, 1, 1, 1)$. Ако је $x_1 = 6$, онда је $x_2\cdot\ldots\cdot x_6 = 6$, па је или $x_2 = 6$, $x_3 = \ldots = x_6 = 1$ или $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, што у другом случају доводи до $x_1+\ldots+x_6 = 14 \neq 16$, а у првом доводи до решења $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (6, 6, 1, 1, 1, 1)$. Ако је $x_1 = 4$, онда је $x_2 = x_3 = 3$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, па је $x_1+\ldots+x_6 = 13 \neq 16$, а ако је $x_1 = 3$, онда је $x_2 = 3$, $x_3 = x_4 = 2$, $x_5 = x_6 = 1$, па је $x_1+\ldots+x_6 = 12 \neq 16$, односно ни у овим случајевима не постоји полином са наведеним особинама.

Дакле, постоји два полинома са наведеним особинама,

$$\begin{array}{rcl} (x-9)(x-2)^2(x-1)^3 & = & x^6-16x^5+82x^4-196x^3+241x^2-148x+36 \\ \text{и} \quad (x-6)^2(x-1)^4 & = & x^6-16x^5+90x^4-220x^3+265x^2-156x+36, \end{array}$$

па је $a \in \{82, 90\}$ (Тангента, M1803).

4. Ако је $p = \sin^2 x \in [0,1]$, $q = \sin^2 y \in [0,1]$, $r = \sin^2 z \in [0,1]$, коришћењем $\cos^2 t = 1-\sin^2 t$ и $\cos 2t = 1-2\sin^2 t$, добија се систем линеарних једначина

$$ap+q+r = 1, \quad p+aq+r = a, \quad p+q+ar = a^2.$$

Сабирањем добијених једначина добија се $(a+2)(p+q+r) = 1+a+a^2$, што за $a = -2$ доводи до $0 = 3$, односно у том случају нема решења, док се за $a \neq -2$ добија $p+q+r = \frac{1+a+a^2}{2+a}$. Одузимањем добијене једначине од осталих једначина система, следи

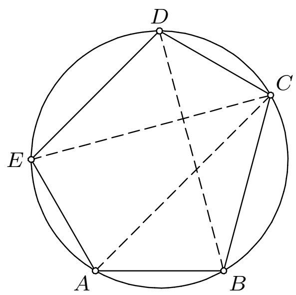
$$(a-1)p = 1-\tfrac{1+a+a^2}{2+a} = \tfrac{1-a^2}{2+a}, \quad (a-1)q = \tfrac{a-1}{2+a}, \quad (a-1)r = \tfrac{(a-1)(a+1)^2}{2+a}.$$

Уколико је $a = 1$, систем се своди на $p+q+r = 1$, одакле је $(p, q, r) = (m, n, 1-m-n)$ за $m, n \in \mathbb{R}$. Како је $p, q, r \in [0,1]$, мора бити $m, n \geqslant 0$ и $m+n \leqslant 1$, па је решење полазног система $(x, y, z) \in \big\{(\pm\arcsin\sqrt{m}+2k_1\pi, \pm\arcsin\sqrt{n}+2k_2\pi, \pm\arcsin\sqrt{1-m-n}+2k_3\pi) \mid m, n \in [0,1], m+n \in [0,1], k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}\big\}$.

Уколико је $a \neq 1$ и $a \neq -2$, добија се $p = -\frac{a+1}{a+2}$, $q = \frac{1}{a+2}$, $r = \frac{(a+1)^2}{a+2}$. Међутим, како су $p, q, r \in [0,1]$ и како $p \geqslant 0$ доводи до $a \in (-2, -1]$, а $q \leqslant 1$ до $a \in (-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$, следи да мора бити $a = -1$. У том случају је $(p, q, r) = (0, 1, 0)$ тј. $(x, y, z) \in \big\{\big(k_1\pi, \frac{\pi}{2}+2k_2\pi, k_3\pi\big) \mid k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}\big\}$.

Друго решење. Као и у првом решењу, сменом $p = \sin^2 x \in [0,1]$, $q = \sin^2 y \in [0,1]$, $r = \sin^2 z \in [0,1]$ се добија систем линеарних једначина $ap+q+r = 1$, $p+aq+r = a$, $p+q+ar = a^2$, а одговарајуће детерминанте система су $\Delta = (a+2)(a-1)^2$, $\Delta_p = -(a+1)(a-1)^2$, $\Delta_q = (a-1)^2$, $\Delta_r = (a-1)^2(a+1)^2$, па примена Крамерове теореме доводи до дискусије аналогне оној која је спроведена у првом решењу.

5. Нека су $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ углови над тетивама AB и BC, редом, у описаном кругу петоугла $ABCDE$, полупречника R. Онда су централни углови над AB и CD једнаки 2α, над BC и DE једнаки 2β, а над AE једнак 60°, па је $4(\alpha+\beta)+60^\circ = 360^\circ$, односно $\alpha+\beta = 75^\circ$. Како је $\sin\alpha = \frac{AB}{2R} = \frac{1}{2R}$, $\sin\beta = \frac{BC}{2R} = \frac{1}{\sqrt{2}R}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{4R^2}} = \frac{\sqrt{4R^2-1}}{2R}$ и $\cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{2R^2}} = \frac{\sqrt{2R^2-1}}{\sqrt{2}R}$, следи $\cos(\alpha+\beta) = \cos 75^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, односно $\frac{\sqrt{(2R^2-1)(4R^2-1)}}{2\sqrt{2}R^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}R^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, тј. $\sqrt{(2R^2-1)(4R^2-1)} = 1+(\sqrt{3}-1)R^2$. Квадрирањем добијене везе добија се $8R^4-6R^2+1 = 1+2(\sqrt{3}-1)R^2+(\sqrt{3}-1)^2R^4$, одакле, сређивањем и како је $R \neq 0$, следи $\left(8-(\sqrt{3}-1)^2\right)R^2 = 4+2\sqrt{3}$, тј. $R^2 = \frac{4+2\sqrt{3}}{8-4+2\sqrt{3}} = 1$. Како је $R>0$, следи $R=1$, па како је AE тетива над централим углом од 60°, следи $AE = R = 1$.



Опш–22–4Б5

Друго решење. Нека је $\sphericalangle BCA = \varphi$ и $\sphericalangle CAB = \psi$. Како је $AB = CD$, важи $\sphericalangle DEC = \varphi$, а како је $BC = DE$, важи $\sphericalangle ECD = \psi$, па су $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$ подударни. Аналогно, њима је подударан и $\triangle DCB$. Како је $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \varphi - \psi$ и $\sphericalangle BCD = \varphi + 30^\circ + \psi$, следи $\varphi + \psi = 75^\circ$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE = 105^\circ$. Из косинусне теореме, примењене на $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$, следи $AC^2 = EC^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 105^\circ = 3 - 2\sqrt{2} \cdot \cos 105^\circ = 2+\sqrt{3}$, јер је, као у првом решењу, $\cos 105^\circ = -\cos 75^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, па из косунусне теореме примењене на $\triangle ACE$ следи $AE^2 = AC^2 + EC^2 - 2 \cdot AC \cdot EC \cdot \cos 30^\circ = (2-\sqrt{3})AC^2 = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$, односно $AE = 1$.

Коментар. Из првог решења видимо да је $EA = 1$ и ако је $\sphericalangle ACE = 30^\circ$, било које две од AB, BC, CD, DE једнаке 1, а преостале две једнаке $\sqrt{2}$.